2.4. Алгебраическая дробь

2.4.1. Алгебраическая дробь. Сокращение дробей

Алгебраическая дробь — это дробь, у которой числитель и знаменатель являются многочленами.

Например, $\frac{3}{x-2}$; $\frac{a+7}{a-7}$; $\frac{x^2+y}{x^2-xy+2y^2}$; $\frac{a}{x}$; $\frac{3}{b}$.

Значение переменных, при которых дробь имеет смысл, называют **допустимыми значениями переменных**.

Например, для дроби $\frac{3}{x-2}$ допустимыми являются все значения переменной x, кроме $x = 2$.

Допустимыми значениями переменных алгебраической дроби являются все значения переменных, кроме тех, при которых знаменатель дроби равен нулю.

Например, для дробей: $\frac{x}{x^2-4}$ $x \neq 2$ и $x \neq -2$; $\frac{5}{|y|-4}$ $y \neq 4$ и $y \neq -4$; $\frac{a}{a^2-3a+2}$ $a \neq 1$ и $a \neq 2$; $\frac{a+1}{a(a-1)(a+5)}$ $a \neq 0$, $a \neq 1$ и $a \neq -5$.

Основное свойство алгебраической дроби

Если числитель и знаменатель алгебраической дроби умножить или разделить на один и тот же ненулевой многочлен, то получится дробь, равная ей.

Это свойство позволяет сокращать дроби и приводить их к общему знаменателю.

Сократить алгебраическую дробь означает разделить числитель и знаменатель на общий множитель, не равный нулю.

Пример 1. Сократить дроби:

а) $\dfrac{28x^2y^2}{35x^2y^3} = \dfrac{4 \cdot 7 \cdot x^2 \cdot y^2}{5 \cdot 7 \cdot x^2 \cdot y^2 \cdot y} = \dfrac{4}{5y}$;

б) $\dfrac{-15mn^2}{40m^2n^2} = \dfrac{-5 \cdot 3 \cdot m \cdot n^2}{5 \cdot 8 \cdot m \cdot m \cdot n^2} = -\dfrac{3}{8m}$;

в) $\dfrac{6a-3b}{8a-4b} = \dfrac{3(2a-b)}{4(2a-b)} = \dfrac{3}{4}$;

г) $\dfrac{4y-8}{y^2-4y+4} = \dfrac{4(y-2)}{(y-2)^2} = \dfrac{4}{y-2}$;

д) $\dfrac{4c^2-25x^2}{4c^2+20cx+25x^2} = \dfrac{(2c-5x)(2c+5x)}{(2c+5x)^2} = \dfrac{2c-5x}{2c+5x}$;

е) $\dfrac{8a+4b}{2ab+b^2-2ad-bd} = \dfrac{4(2a+b)}{b(2a+b)-2d(2a+b)} = \dfrac{4(2a+b)}{(2a+b)(b-2d)} = \dfrac{4}{b-2d}$;

ж) $\dfrac{x^3+8}{x+2} = \dfrac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x+2} = x^2-2x+4$;

з) $\dfrac{x^2+3xy+2y^2}{x^2-xy-2y^2} = \dfrac{x^2+xy+2xy+2y^2}{x^2+xy-2xy-2y^2} = \dfrac{x(x+y)+2y(x+y)}{x(x+y)-2y(x+y)} =$

$= \dfrac{(x+y)(x+2y)}{(x+y)(x-2y)} = \dfrac{x+2y}{x-2y}$.

Пример 2. Построить график функции: $y = \dfrac{x^2-1}{x+1}$.

Решение:

Рассмотрим выражение $\dfrac{x^2-1}{x+1} = \dfrac{(x-1)(x+1)}{x+1} = x-1$ при условии, что $x + 1 \neq 0$, т. е. $x \neq -1$.

Нужно построить график функции: $y = \begin{cases} x-1; \\ x \neq -1. \end{cases}$

Графиком данной функции является прямая $y = x - 1$ с «выколотой» точкой $(-1; -2)$.

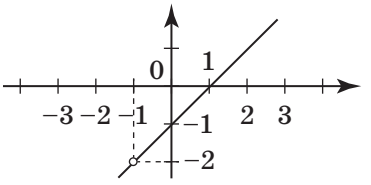

Рис. 2.1

2.4.2. Действия с алгебраическими дробями

Сложение и вычитание алгебраических дробей

Чтобы сложить (вычесть) дроби с одинаковыми знаменателями, нужно сложить (вычесть) их числители, а знаменатели оставить прежними.

Пример 1. Выполнить действия:

а) $\dfrac{b-3}{4b} + \dfrac{3b-1}{4b} = \dfrac{b-3+3b-1}{4b} = \dfrac{4b-4}{4b} = \dfrac{4(b-1)}{4b} = \dfrac{b-1}{b}$;

б) $\dfrac{a-3b}{a+b}-\dfrac{3a-b}{a+b}=\dfrac{a-3b-(3a-b)}{a+b}=\dfrac{a-3b-3a+b}{a+b}=\dfrac{-2a-2b}{a+b}=$

$=\dfrac{-2(a+b)}{a+b}=-2;$

в) $\dfrac{7c-9}{c-3}-\dfrac{c-15}{3-c}=\dfrac{7c-9}{c-3}+\dfrac{c-15}{c-3}=\dfrac{7c-9+c-15}{c-3}=\dfrac{8c-24}{c-3}=\dfrac{8(c-3)}{c-3}=8.$

Чтобы сложить (вычесть) дроби с разными знаменателями, нужно сначала привести дроби к одному знаменателю, а затем складывать (вычитать) дроби с одинаковыми знаменателями.

Пример 2. Выполнить действия:

а) $\dfrac{5b}{ac}+\dfrac{4c}{b}$;

б) $\dfrac{4}{9x^2y^2}+\dfrac{7}{12xy^3}$;

в) $\dfrac{2}{xy-y^2}-\dfrac{2}{x^2-xy}$;

г) $\dfrac{2}{x+2}-\dfrac{x+3}{4-x^2}+\dfrac{3x+1}{x^2-4x-4}$.

Решение:

а) Общим знаменателем двух дробей будет произведение их знаменателей, поэтому дополнительный множитель для первой дроби — b, а для второй — ac:

$$\frac{5b^{/b}}{ac}+\frac{4c^{/ac}}{b}=\frac{5b^2+4ac^2}{abc}.$$

б) Общий знаменатель дробей — произведение наименьшего общего кратного чисел 9 и 12, т. е. 36, и степеней переменных с наибольшим показателем, с которыми они входят в знаменатели, т. е. общим знаменателем будет $36x^2y^3$. Дополнительный множитель для первой дроби — $4y$, для второй — $3x$:

$$\frac{4^{/4y}}{9x^2y^2}+\frac{7^{/3x}}{12xy^3}=\frac{16y+21x}{36x^2y^3}.$$

в) Разложим знаменатель каждой дроби на множители:

$$\frac{2}{xy-y^2}-\frac{2}{x^2-xy}=\frac{2^{/x}}{y(x-y)}-\frac{2^{/y}}{x(x-y)}=\frac{2x-2y}{xy(x-y)}=\frac{2(x-y)}{xy(x-y)}=\frac{2}{xy}.$$

г) $\dfrac{2}{x+2}-\dfrac{x+3}{4-x^2}+\dfrac{3x+1}{x^2-4x-4}=\dfrac{2^{/(x-2)^2}}{x+2}+\dfrac{x+3^{/x-2}}{(x-2)(x+2)}+\dfrac{3x+1^{/x+2}}{(x-2)^2}=$

$=\dfrac{2(x^2-4x+4)+(x-2)(x+3)+(x+2)3x+1)}{(x+2)(x-2)^2}=$

$=\dfrac{2x^2-8x+8+x^2+3x-2x-6+3x^2+x+6x+2}{(x+2)(x-2)^2}=\dfrac{6x^2+4}{(x+2)(x-2)^2}.$

Чтобы сложить (вычесть) дробь и целое число, нужно целое выражение представить в виде дроби со знаменателем 1, а затем использовать правило сложения (вычитания) дробей с разными знаменателями.

Пример 3. Преобразовать в дробь выражение: $x+y-\dfrac{x^2+y^2}{x+y}$.

Решение:

$$x+y-\frac{x^2+y^2}{x+y}=\frac{x+y^{/x+y}}{1}-\frac{x^2+y^2}{x+y}=\frac{(x+y)^2-(x^2+y^2)}{x+y}=$$

$$=\frac{x^2+2xy+y^2-x^2-y^2}{x+y}=\frac{2xy}{x+y}.$$

Умножение и деление алгебраических дробей. Возведение дроби в степени

Чтобы умножить дробь на дробь, нужно перемножить отдельно их числители и знаменатели, первое произведение записать в числитель, второе — в знаменатель.

С помощью этого правила получаем и правило возведения дроби в n-ю степень:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}.$$

Пример 4. Выполнить умножение и возведение в степень:

а) $\dfrac{25a^2}{4b^3}\cdot\dfrac{10b^2}{15a^5}=\dfrac{25a^2\cdot 10b^2}{4b^3\cdot 15a^5}=\dfrac{25}{6a^3b}$;

б) $12m^2\cdot\left(-\dfrac{3}{16mn^3}\right)^2=-\dfrac{12m^2\cdot 3}{16mn^3}=-\dfrac{9m}{n^3}$;

в) $\left(-\dfrac{2a^3b}{3m^2}\right)^4=\dfrac{16a^{12}b^4}{81m^8}$;

г) $\left(-\dfrac{3a^3b}{5c^2}\right)^3=-\dfrac{27a^9b^3}{125c^6}$;

д) $\dfrac{3a-1}{a^2-1}\cdot\dfrac{a+1}{9a^2-1}=\dfrac{(3a-1)(a+1)}{(a-1)(a+1)(3a-1)(3a+1)}=\dfrac{1}{(a-1)(3a+1)}$;

е) $\dfrac{a^2-1}{x^3-1}\cdot\dfrac{x^2+x+1}{a^2+2a+1}=\dfrac{(a-1)(a+1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)(a+1)^2}=\dfrac{a-1}{(x-1)(a+1)}$;

ж) $\dfrac{x^2+xy+xz+yz}{x^2-xy+xz-yz}\cdot\dfrac{x^2-xy-2x+2y}{x^2+xy-2x-2y}=\dfrac{x(x+y)+z(x+y)}{x(x-y)+z(x-y)}\times$

$\times\dfrac{x(x-y)-2(x-y)}{x(x+y)-2(x+y)}=\dfrac{(x+y)(x+z)\cdot(x-y)(x-2)}{(x-y)(x+z)\cdot(x+y)(x-2)}=1$;

з) $16^n\cdot\left(\dfrac{16^{n+1}+4\cdot 16^n}{64^{n+1}-4\cdot 64^n}\right)=16^n\cdot\left(\dfrac{16^n\cdot(16+4)}{64^n\cdot(64-4)}\right)^2=(2^4)^n\cdot\left(\dfrac{(2^4)^n\cdot 20}{(2^6)^n\cdot 60}\right)=$

$=\dfrac{2^{4n}\cdot(2^{4n})^2}{(2^{6n}\cdot 3)^2}=\dfrac{2^{4n}\cdot 2^{8n}}{2^{12n}\cdot 9}=\dfrac{1}{9}$.

Чтобы разделить одну дробь на другую, нужно первую дробь умножить на дробь, обратную второй:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc},\ b\neq 0,\ c\neq 0,\ d\neq 0.$$

Пример 5. Выполнить деление:

а) $\frac{18a^3}{-5b^4} : \frac{6a^4}{15b} = -\frac{18a^3 \cdot 15b}{5b^4 \cdot 6a^4} = -\frac{9}{ab^3}$;

б) $-14xy^2 : \left(-\frac{28x^2y^3}{5z}\right) = \frac{14xy^2 \cdot 5z}{28x^2y^3} = \frac{5z}{2xy}$;

в) $\frac{5mn^2}{7k^3} : (-10k^2n^2) = -\frac{5mn^2}{7k^3 \cdot 10k^2n^2} = -\frac{m}{14k^5}$;

г) $\left(\frac{3a}{a-b}\right)^2 : \frac{a^2+ab}{a^2-b^2} = \frac{9a^2 \cdot (a-b)(a+b)}{(a-b)^2 \cdot a(a+b)} = \frac{9a}{a-b}$.

2.4.3. Рациональные выражения и их преобразования

Рациональным выражением называется выражение, составленное из чисел, букв, их степеней, скобок и арифметических знаков.

Например, $2x^2$; 7; $\frac{5x+1}{x-1}$; $\frac{2a+b}{a} - \frac{b^2}{4a}$.

Рациональное выражение называется **целым**, если оно не содержит деления на выражение с переменной.

Например, выражения $3x - 1$; -3; $5xy - 1$; $\frac{x+3}{4}$; $\frac{1}{8}xy$ — целые.

Рациональная (алгебраическая) дробь — это дробь, у которой числитель и знаменатель являются многочленами.

Тождественные преобразования рациональных выражений

Пример 1. Упростить выражение: $\frac{a}{3-a} + \frac{a^2+3a}{2a+3} \cdot \left(\frac{a+3}{a^2-3a} - \frac{a}{a^2-9}\right)$.

Решение:

1. Выполним сначала действие в скобках. Для этого разложим знаменатели на множители и приведем дроби к общему знаменателю:

$$\frac{a+3}{a^2-3a} - \frac{a}{a^2-9} = \frac{a+3^{/a+3}}{a(a-3)} - \frac{a^{/a}}{(a-3)(a+3)} = \frac{(a+3)^2-a^2}{a(a-3)(a+3)} =$$

$$= \frac{a^2+6a+9-a^2}{a(a-3)(a+3)} = \frac{6a+9}{a(a-3)(a+3)} = \frac{3(2a+3)}{a(a-3)(a+3)}.$$

2. Выполним умножение:

$$\frac{a^2+3a}{2a+3} \cdot \frac{3(2a+3)}{a(a-3)(a+3)} = \frac{a(a+3) \cdot 3(2a+3)}{(2a+3) \cdot a(a-3)(a+3)} = \frac{3}{a-3}.$$

3. Выполним сложение:

$$\frac{a}{3-a} + \frac{3}{a-3} = \frac{a}{3-a} - \frac{3}{3-a} = \frac{a-3}{3-a} = -\frac{a-3}{a-3} = -1.$$

Пример 2. Доказать тождество:

$$\left(\frac{a}{a+n} - \frac{a}{a^2+n^2+2an}\right) : \left(\frac{a}{a-n} - \frac{a}{a^2-n^2}\right) = \frac{a-n}{a+n}.$$

Доказательство:

Упростим выражение, стоящее в левой части:

$$\left(\frac{a}{a+n}-\frac{a}{a^2+n^2+2an}\right):\left(\frac{a}{a-n}-\frac{a}{a^2-n^2}\right)=\left(\frac{a^{/a+n}}{a+n}-\frac{a}{(a+n)^2}\right):$$

$$:\left(\frac{a^{/a+n}}{a-n}-\frac{a}{(a-n)(a+n)}\right)=\frac{a^2+an-a}{(a+n)^2}:\frac{a^2+an-a}{(a-n)(a+n)}=$$

$$=\frac{(a^2+an-a)\cdot(a-n)(a+n)}{(a+n)^2\cdot(a^2+an-a)}=\frac{a-n}{a+n}.$$

Получили выражение, стоящее в правой части равенства. Тождество доказано.